Géométrie euclidienne et hermitienne

Nicole Mestrano

mai 2003

Table des matières

0.1 Programme 2
0.2 Mode d'emploi et Références 4

1 Espaces euclidiens et hermitiens **5**
1.1 Produits scalaires 5
1.2 Espaces métriques et formes positives définies 6
1.3 Inégalités de Schwarz et de Minkowski 7
1.4 Ecriture dans une base, matrice 8
1.5 Vecteurs orthogonaux 9
1.6 Procédé d'orthonormalisation de Schmidt 10
1.7 Sous-espaces orthogonaux 11
1.8 Symétries et projections orthogonales 12
1.9 Espace vectoriel dual 13

2 Endomorphismes **15**
2.1 Adjoint d'un endomorphisme 15
2.2 Matrice de u^* et premières propriétés 16
2.3 Endomorphismes autoadjoints, (anti-)symétriques 16
2.4 Diagonalisation 17
2.5 Endomorphismes normaux 18

3 Automorphismes orthogonaux **20**
3.1 Isométries 20
3.2 Automorphismes orthogonaux, unitaires 21
3.3 Les groupes $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ et $SU(n)$ 22
3.4 Symétries orthogonales 23
3.5 Produit mixte et produit vectoriel dans les espaces euclidiens orientés 24

4 Géométrie vectorielle euclidienne **26**
4.1 Produits des reflexions 26
4.2 Les angles non-orientés 27
4.3 Groupe orthogonal d'une droite euclidienne 28
4.4 Groupe orthogonal du plan euclidien $E = E_2$ 28
4.5 Classification des éléments 28
4.6 Angle orienté de deux vecteurs 29
4.7 Mesure de l'angle orienté de deux vecteurs 30
4.8 Groupe orthogonal de l'espace euclidien de dimension 3, $E = E_3$ 31
4.9 Classification des éléments 32
4.10 Similitudes. 33

5 Réduction des endomorphismes **35**
5.1 Formes bilinéaires 35
5.2 Formes quadratiques 36
5.3 Forme polaire 37
5.4 Noyaux des formes bilinéaires et quadratiques, formes non-dégénérées 38
5.5 Endomorphisme symétrique associé à une forme quadratique . 39
5.6 Diagonalisation 41
5.7 Décomposition en carrés 42
5.8 La signature d'une forme quadratique 43

0.1 Programme

Nous proposons d'étudier la partie suivante du programme de CAPES.

Programme : 2. Algèbre et Géométrie
2.IV. Espaces euclidiens, espaces hermitiens

Les espaces vectoriels considérés dans ce chapitre sont de dimension finie.
2.IV.1. Espaces euclidiens.
(a) Isomorphisme canonique avec le dual. Sommes directes orthogonales. Dimension de l'orthogonal d'un sous-espace, normale à un hyperplan. Projecteurs et symétries orthogonales.
(b) Adjoint d'un endomorphisme : matrice associée dans une base orthonormale. Endomorphismes symétriques, antisymétriques.

(c) Automorphismes orthogonaux. Groupe orthogonal $O(E)$, groupe des rotations (ou spécial orthogonal) $SO(E)$. Matrices orthogonales. Groupes $O(n)$ et $SO(n)$. Matrice associée à un automorphisme orthogonal dans une base orthonormale.
Changements de base orthonormale.
(d) Déterminant de n vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n.
Produit vectoriel en dimension 3 ; expression dans une base orthonormale directe.

2.IV.2. Géométrie vectorielle euclidienne.

(a) Les réflexions engendrent le groupe orthogonal $O(E)$.
(b) Dans le plan euclidien orienté ($n = 2$) : matrice d'une rotation ; angle d'une rotation. Morphisme canonique de $\mathbf{R}$ sur $SO(2)$.
Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.
(c) Dans l'espace euclidien orienté ($n = 3$) : Axe et angle d'une rotation. Lest demi-tours engendrent $SO(3)$.
Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.
(d) En dimension 2 ou 3 : groupe des similitudes ; groupe des similitudes drectes.
Rapport d'une similitude ; automorphisme orthogonal associé.

2.IV.3. Espaces hermitiens.

(a) Sommes diretes orthogonales. Projections orthogonaux.
(b) Adjoint d'un endomorphisme ; matrice associée dans une base orthonormale.
Endomorphismes hermitiens, matrices hermitiennes.
(c) Automorphismes unitaires. Groupe unitaire $U(E)$. Groupe $U(n)$ des matrices unitaires d'ordre n.

2.IV.5. Réduction des endomorphismes symétriques et des endomorphismes hermitiens.

(b) Formes bilinéaires symétriques sur un espace euclidien, formes quadratiques, polarisation.
Endomorphisme symétrique associé à une forme quadratique ; réduction dans une base orthonormale.

0.2 Mode d'emploi et Références

Ce programme est divisé en 5 chapitres.

Les démonstrations des théorèmes et propositions ne sont pas rédigées car ce sont d'excellents exercices à faire en s'aidant, s'il le faut, d'anciens cours ou de livres. Cependant toutes les étapes importantes (quand il y en a !) sont explicitées dans les exercices précédent leur énoncé.

Pour un cours complet, on pourra consulter les livres de Marcel Berger, "Géométrie 1 et "Géométrie 2" édité chez Nathan et le polycope de "Géométrie Euclidienne" de l'Université d'Orsay rédigé par Marie-Claude David, Frédéric Haglund et Daniel Perrin.

Chapitre 1

Espaces euclidiens et hermitiens

On étudie ici la partie suivante du programme :
2.IV.1. Espaces euclidiens.
a. Isomorphisme canonique avec le dual.
Sommes directes orthogonales.
Dimension de l'orthogonal d'un sous-espace, normale à un hyperplan.
Projections et symétries orthogonales.
2.IV.3. Espaces hermitiens.
a. Sommes directes orthogonales.
Projecteurs orthogonaux.

1.1 Produits scalaires

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $K = \mathbf{R}$ ou $K = \mathbf{C}$.
1.1.1 Définition: Un *produit scalaire* sur E est une application

$$(\mid) : E \times E \to K$$

$$(x, y) \mapsto (x|y) = x.y$$

telle que : pour tout $x, y, z \in E$ et pour tout $\lambda \in K$,
1. $(x + y|z) = (x|z) + (y|z)$ et $(\lambda x|y) = \overline{\lambda}(x|y)$ (sesqui-linéarité par rapport à la première variable) ;

2. $(x|y+z) = (x|y) + (x|z)$ et $(x|\lambda y) = \lambda(x|y)$ (linéarité par rapport à la deuxième variable) ;
3. $(y|x) = \overline{(x|y)}$ (ce qui implique que $(x,x) \in \mathbf{R}$) ;
4. $(x|x) > 0$ si $x \neq 0$.

1.1.2 Définition: Un espace vectoriel E muni d'un produit scalaire est appelé *espace euclidien* si $K = \mathbf{R}$ et *espace hermitien* si $K = \mathbf{C}$.
Remarquez que (1) + (3) $\Rightarrow$ (2) et que (2) + (3) $\Rightarrow$ (1).

1.1.3 Définition: La *forme quadratique associée* au produit scalaire est l'application $Q : E \to K$ définie par $Q(x) = (x|x)$.

1.1.4 Définitions: Une application $(\,|\,)$ vérifiant les propriétés $1, 2$ et 3 est une *forme bilinéaire symétrique* si $K = \mathbf{R}$ et une *forme hermitienne* si $K = \mathbf{C}$.
Si de plus, elle vérifie la propriété 4, alors on dit qu'elle est *définie positive*, et que la forme quadratique associée Q est *définie positive*.

Exemple : On suppose que $E = K^n$ avec $K = \mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ et on pose

$$(x|y) = \overline{x_1}y_1 + \ldots + \overline{x_n}y_n.$$

pour tout $x = (x_1, \ldots, x_n) \in E$ et $y = (y_1, \ldots, y_n) \in E$.
Montrez que nous définissons ainsi un produit scalaire (c'est le produit scalaire usuel). Peut-on supprimer (ou changer de place) la conjugaison complexe ?

1.2 Espaces métriques et formes positives définies

1.2.1 Rappels:

i). Un *espace métrique* est un ensemble X muni d'une distance.
Une distance sur un ensemble X est une fonction positive d de XxX vers $\mathbf{R}^+$ telle que pour tout $x, y, z \in X$,
1. $d(x,y) = 0$ si et seulement si $x = y$.
2. $d(x,y) = d(y,x)$.
3.$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$.

ii). Soit E un espace vectoriel défini sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$. On dit que E est un *espace vectoriel normé* s'il est muni d'une norme.
Une norme sur un espace vectoriel E est une application $\|.\|$ de E vers $\mathbf{R}^+$ telle que pour tout $x, y \in E$,
1. $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$.

2. $\|\lambda x\| = |\lambda|\|x\|$.
3.$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.
iii). Soit f une forme bilinéaire symétrique (resp. hermitienne) sur un espace vectoriel E.
On dit que f est non dégénérée si :

$$(\forall y \in E, f(x, y) = 0) \Rightarrow x = 0.$$

On dit que f est positive si : $f(x, x) \geq 0 \forall x \in E$.
On dit que f est définie si : $f(x, x) = 0 \Rightarrow x = 0$.
On dit qu'un vecteur x est isotrope si : $f(x, x) = 0$.
1.2.2 Exercice: Montrez que f est définie si et seulement si ou bien f est définie positive, ou bien f est définie négative.
1.2.3 Exercice: Montrez que si f est définie, alors elle est non dégénérée.
1.2.4 Exercice: Soit f un forme bilinéaire positive symétrique ou hermitienne, sur un espace vectoriel E.
Motrer que pour tout $x, y \in E$ on a

$$|f(x, y)|^2 \leq \ f(x, x).f(y, y)$$

En déduire que, dans ce cas que, f est définie si et seulement si elle est non dégénérée.
Soit x un vecteur isotrope, quel est sont orthogonal ?

1.3 Inégalités de Schwarz et de Minkowski

Jusqu'à la fin de ce chapitre et sauf mention du contraire E est un espace vectoriel euclidien ou hermitien muni d'un produit scalaire (|).

1.3.1 Définition: Pour tout $x \in E$, on note $\|x\|$ le réel positif ou nul tel que $\|x\|^2 = (x, x)$.

Inégalité de Schwarz : pour tout $x, y \in E$ l'on a

$$|(x|y)| \leq \ \|x\|.\|y\|$$

avec égalité si et seulement si x et y sont liés.

Inégalité de Minkowski : Pour tout $x, y \in E$ on a

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

avec égalité si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbf{R}$ avec $\lambda \geq 0$ et ($x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$).

1.3.2 Exercice: a. Démontrez les inégalités de Schwarz et de Minkowski.
b. En déduire que $\|.\|$ est une norme et que l'on définit une distance sur E en posant $d(x, y) := \|x - y\|$, pour tout $x, y \in E$.

1.3.3 Définition: On dit que cette norme est la *norme euclidienne* (resp. *hermitienne*) et que la distance est la *distance euclidienne* (resp. *hermitienne*).

1.4 Ecriture dans une base, matrice

Soit $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E. Pour $x, y \in E$ tels que

$$x = \sum x_i e_i, \quad y = \sum y_i e_i$$

montrez que

$$(x|y) = \sum \overline{x}_i y_j (e_i|e_j)$$

Soit $A = (a_{ij})$ où $a_{ij} = (e_i|e_j)$ la matrice associée au produit scalaire. En écrivant

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

et

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

on obtient la formule

$$(x|y) = {}^t\,\overline{X} A Y$$

1.4.1 Exercice: a. Montrez que $A^t = \overline{A}$.
b. Soient ϕ une forme hermitienne et A sa matrice associée. Montrez qu'on a toujours $A^t = \overline{A}$. Quelle condition (sur A) est-il nécessaire d'ajouter pour que ϕ soit un produit scalaire.
Changement de base : Soit $\mathcal{B}' = (e'_1, \ldots, e'_n)$ une autre base de E.
1.4.2 Exercice: Calculer la matrice A' de $(-|-)$ dans $\mathcal{B}'$ ainsi que X' et Y' en fonction de la matrice de passage P de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$.
1.4.3 Définition: Une matrice A telle que $A^t = \overline{A}$ est dite *hermitienne*.
1.4.4 Exercice: Montrez les égalités suivantes :

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

Si $K = \mathbf{R}$:

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4(x|y).$$

Si $K = \mathbf{C}$:

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2) = 4(x|y).$$

1.5 Vecteurs orthogonaux

1.5.1 Définitions:
1. On dit que deux vecteurs $x, y \in E$ sont orthgonaux (et on note : $x \perp y$) si $(x|y) = 0$.
2. On dit que deux sous espaces vectoriels non vides $F, G \subset E$ sont orthogonaux (et on note : $F \perp G$) si pour tout $x \in F$ et pour tout $y \in G$ on a $(x|y) = 0$.
3. Pour tout sous ensemble $F \subset E$ l'orthogonal de F est l'ensemble

$$F^\perp := \{x \in E, \ \ \forall y \in F, (x|y) = 0\}.$$

1.5.2 Exercice: Soit F un sous ensemble de E.
a. Montrez que le sous espace vectoriel engendré par F, est le plus petit sous espace vectoriel de E contenant F. On le note $Vect(F)$.
b. Montrez que $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E ;
Montrez plus précisement que $F^\perp = (Vect(F))^\perp$.
c. Calculer $F \cap F^\perp$ et $E^\perp$.

1.6 Procédé d'orthonormalisation de Schmidt

Théorème 1.6.1 *Si* $\{c_1, \ldots, c_n\}$ *est une base de* E *alors il existe une base* $\{e_1, \ldots, e_n\}$ *orthonormée telle que pour tout* p*,*

$$\langle e_1, \ldots, e_p \rangle = \langle c_1, \ldots, c_p \rangle.$$

où $\langle e_1, \ldots, e_p \rangle = Vect(e_1, \ldots, e_p)$ *désigne l'espace vectoriel engendré par l'ensemble* $e_1, \ldots, e_p$*.*

Démonstration : Exercice

1.6.2 Exercice: Généraliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt lorsque l'espace vectoriel E, au lieu d'être euclidien ou hermitien est seulement muni d'une forme bilinéaire symétrique positive (resp. hermitienne) mais en se limitant à une base orthogonale (et non orthonormée).

1.6.3 Exercice: Dans $\mathbf{R}^3$ euclidien, orthonormalisez, par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt :

$$v_1 = (1, 1, 1),\ v_2 = (1, 1, 0),\ v_3 = (1, 0, 0)$$

et puis

$$w_1 = (1, -1, 0),\ w_2 = (-1, 2, 0),\ w_3 = (-1, 0, 1).$$

Dans $\mathbf{C}^3$ hermitien, orthonormalisez par le procédé d'orthonormalisation de Schmidt :

$$u_1 = (i, 0, 1),\ u_2 = (0, -1, i),\ u_3 = (0, 1, 2).$$

1.6.4 Exercice: Pour tout entier $n \geq 1$ on note E_n l'espace vectoriel des fonctions continues de $[-1, 1]$ vers $\mathbf{R}$ engendré par les fonctions polynomiales

$$f_0, \ldots, f_n$$

où

$$f_i : [-1, 1] \to \mathbf{R}$$
$$x \mapsto f_i(x) = x^i.$$

On note pour tout $0 \leq i \leq n$ par l_n la fonction associée au polynôme

$$L_n = \frac{d^n}{dX^n}((X^2 - 1)^n).$$

(i) Montrez qu'on peut munir E_n d'une structure d' espace euclidien en posant, pour tout $(f, g) \in ExE$:

$$(f|g) := \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt.$$

(ii) La famille $\{f_0, \ldots, f_n\}$ est-elle une base orthonormée de E_n ?
(iii) Montrez que $\{l_0, \ldots, l_n\}$ est une base de E_n.
(iv) Montrez que pour tout $1 \leq m \leq n$ et pour tout $p \leq m-1$ on a $(l_m, f_p) = 0$.
Indication : On pourra démontrer que si un polynôme P de degré r a une racine a de multiplicité m, alors a est racine de multiplicité $m-i$ du polynôme $P^{(i)}$, pour tout entier i variant de 0 à $m-1$ où $P^{(i)}$ est le polynôme obtenu en dérivant i fois le polynôme P.
(v) La famille $\{l_0, \ldots, l_n\}$ est-elle orthogonale ? normée ?

1.7 Sous-espaces orthogonaux

Théorème 1.7.1 *Soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel de E où E est un espace vectoriel de dimension finie. Alors*

$$E = F \oplus F^{\perp}$$

et $F^{\perp\perp} = F$.

Démonstration : Exercice
Questions :
1. Peut-on supposer seulement que F est un sous ensemble de E ?
2. Peut-on supposer que E est de dimension infini ?
Conséquence : On a $dim(F^{\perp}) = dim(E) - dim(F)$.

Théorème 1.7.2 (Théorème de Pythagore)

$$x \perp y \Rightarrow \|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Démonstration : Exercice
Question : L'implication inverse est-elle vraie ?
1.7.3 Exercice: a. Soit $\{c_1, \ldots, c_n\}$ une famille de vecteurs non nuls deux à deux orthogonaux. Montrez qu'elle est libre.
Peut-on supprimer l'hypothèse "non nuls" ?
b. Calculez le produit scalaire et sa matrice asociéee quand la base $\mathcal{B}$ est orthonormée.

1.8 Symétries et projections orthogonales

On désigne par E un espace euclidien ou hermitien de dimension finie égale à n et par F un sous espace vectoriel. On a vu qu'on a la décompostion $E = F \oplus F^{\perp}$.
1.8.1 Définition: La symétrie orthogonale de E par rapport à F est l'application

$$s_F : E \to E$$

définie par

$$x = x' + x'' \in E = F \oplus F^{\perp} \ \mapsto \ x' - x''$$

1.8.2 Définition: La projection orthogonale de E sur F est l'application

$$p_F : E \to F$$

définie par

$$x = x' + x'' \in E = F \oplus F^{\perp} \ \mapsto \ x' \in F.$$

Questions :
i. Les applications s_F et p_F sont-elles des endomorphismes de E ?
ii. Calculer $s_F \circ s_F$, $p_F \circ p_F$, $Im(s_F)$, $Ker(s_F)$, $Inv(s_F)$, $Im(p_F)$, $Ker(p_F)$, $Inv(p_F)$.
oú $Inv(f)$ désigne l'ensemble des éléments invariants par f.

Proposition 1.8.3 *Pour tous $x \in E$ et $y \in F$ on a :*
(1) $y = p_F(x) \Leftrightarrow x - y \in F^{\perp}$;
(2) $y = p_F(x) \Leftrightarrow \|x - y\| = d(x, F)$ où par définition

$$d(x, F) := inf\{d(x, z), \ \ z \in F\}.$$

Démonstration : Exercice

1.8.4 Exercice: Soit H un hyperplan de E (c'est-à-dire, lorsque E est de dimension finie, un sous-espace vectoriel de E, de dimension $dim(E)-1$). On note p_H (resp. $p_{H^\perp}$) la projection orthogonale sur H (resp. sur $H^\perp$). Montrez qu'il existe un vecteur $a \in E$ tel que pour tout $x \in E$,

$$p_{H^\perp}(x) = (x|a)a.$$

En déduire $p_H(x)$ et $s_H(x)$ et $s_{H^\perp}$ où s_H (resp. $s_{H^\perp}$) est la symétrie orthogonale par rapport à H (resp. $H^\perp$), en fonction de x et de a.

Question : Qu'est-ce qu'un hyperplan de E lorsque E est de dimension infinie ?

1.8.5 Exercice: Soit $\mathcal{B} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ une base orthonormée de E. Calculer, pour tout $x = \sum x_i e_i$, l'expression de $p_i(x)$ où p_i est la projection orthogonale de E sur la droite engendrée par le vecteur e_i.

1.9 Espace vectoriel dual

On désigne par E^* l'espace vectoriel dual de E c'est-à-dire l'ensemble des formes linéaires de E dans K.

1.9.1 Exercice: i. Montrez qu'on définit bien une application en posant :

$$\phi : E \to E^*$$

$$a \mapsto \phi(a)$$

où $\phi(a) : E \to K$, est l'application définie par $\phi(a)(x) = (x|a)$.
ii. L'application ϕ est-elle injective ?

Théorème 1.9.2 *Pour tout $f \in E^*$ il existe un unique $a \in E$ tel que $f = \phi(a)$ i.e. tel que pour tout $x \in E$, $f(x) = (x|a)$.*

Démonstration : Exercice

Remarque intéressante Ce théorème se généralise lorsque l'espace vectoriel E, au lieu d'être euclidien est seulement muni d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

Corollaire 1.9.3 *Si $K = \mathbf{R}$ alors $\phi : E \to E^*$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.*

Question : Peut-on remplacer l'hypothèse $K = \mathbf{R}$ par $K = \mathbf{C}$?

1.9.4 Définition: pour $K = \mathbf{C}$ on dira que $\phi : E \to E^*$ est un *isomorphisme semilinéaire*.

1.9.5 Exercice: Montrez que si E est un espace vectoriel réel de dimension infinie, il n'est pas nécéssairement isomorphe à son dual.

Chapitre 2

Endomorphismes

On étudie ici la partie suivante du programme :
2.IV.1. Espaces euclidiens.
b. Adjoint d'un endomorphisme :
matrice associée dans une base orthonormale.
Endomorphismes symétriques, antisymétriques.
2.IV.3. Espaces hermitiens.
b. Adjoint d'un endomorphisme :
matrice associée dans une base orthonormale.
Endomorphismes hermitiens, matrices hermitiennes.

On désigne par E un espace vectoriel euclidien ou hermitien.

2.1 Adjoint d'un endomorphisme

Soit $u : E \to E$ un endomorphisme.

2.1.1 Exercice:
(a) Montrez que pour tout $y \in E$, il existe un unique $z \in E$ tel que pour tout $x \in E$ on ait $(x|z) = (u(x)|y)$.
(b) En déduire l'existence d'une application

$$u^* : E \to E,$$

$$y \mapsto z = u^*(y)$$

où $u^*(y)$ est l'unique élément de E tel que pour tout $x \in E$:

$$(x|u^*(y)) = (u(x)|y).$$

Proposition 2.1.2 *L'application u^* est dans $\mathcal{L}(E)$.*

Démonstration : Exercice.
2.1.3 Définition: L'endomorphisme u^* est appelé *endomorphisme adjoint.*

2.2 Matrice de u^* et premières propriétés

Soient $\mathcal{B}$ une base de E, A la matrice du produit scalaire dans cette base, U la matrice de u et U' celle de u^*.
Exercice 13 :
(a) Calculer U' en fonction de U et de A.
(b) Que devient cette formule si la base $\mathcal{B}$ est orthonormée ?

Proposition 2.2.1 *Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ alors*

$$(u+v)^* = u^* + v^*$$

$$(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$$

$$(u^*)^* = u$$

et si u est bijective alors u^* est bijective et

$$(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$$

Démonstration : Exercice.

2.3 Endomorphismes autoadjoints, (anti-)symétriques

2.3.1 Définition: Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^* = u$ est un *endomorphisme autoadjoint.* Il est aussi appelé *endomorphisme symétrique* si E est euclidien, et *hermitien* si E est hermitien.

Si E est euclidien, un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^* = -u$ est un *endomorphisme antisymétrique.*
Qestion : Pouvez-vous justifier ces définitions ?

2.3.2 Exercice:
(i) On suppose que $u = p_F$ est la projection orthogonale de E sur un sous-espace vectoriel F de E. Décrire u^*.
(ii) On suppose que $u \circ u = u$. On pose $F = u(E)$.
Montrez que $E = F \oplus \ker(u)$. Montrez les équivalences :

$$u = p_F \Leftrightarrow \ker(u) = F^\perp \Leftrightarrow u = u^*.$$

2.3.3 Exercice: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E **hermitien**. On suppose que tout vecteur propre z de u relatif a une valeur propre λ est aussi vecteur propre de u^* pour $\overline{\lambda}$.
Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_s$ les valeurs propres de u ($\lambda_i \neq \lambda_j$ pour $i \neq j$), et $E_1, \ldots, E_s$ les sous-espaces propres correspondants. On pose $F = E_1 \oplus \ldots \oplus E_s$.
(a) Montrez que si $i \neq j$ alors $E_i \perp E_j$.
(b) Soit $v = u|_{F^\perp}$. Montrez que $v \in End(F^\perp)$.
(c) Montrez que $F^\perp = \{0\}$.
(d) En déduire que $E = F$ puis qu'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.
(e) Que cela signifie pour la matrice de u ?

2.3.4 Exercice: Soient E un espace vectoriel euclidien ou hermitien, et $u \in \mathcal{L}(E)$ un **endomorphisme autoadjoint**.
(a) Montrez que si λ est une valeur propre pour u alors $\lambda \in \mathbf{R}$.
(b) En déduire qu'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.

2.4 Diagonalisation

Proposition 2.4.1 *Toute matrice hermitienne est diagonalisable et a toutes ses valeurs propres réelles.*
Toute matrice symétrique réelle est diagonalisable et a toutes ses valeurs propres réelles.

Démonstration : Exercice.

2.4.2 Exercice: Soit E un espace vectoriel euclidien (resp. hermitien) et $\phi : E \times E \to K$ une forme bilinéaire symétrique (resp. une forme hermitienne).
(a) Montrez qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que pour tous $x, y \in E$ on ait $\phi(x, y) = (x|u(y))$.
(b) Montrez que $u^* = u$.
(c) En déduire qu'il existe une base orthonormée $\{e_i\}$ de E, orthogonale pour ϕ (i.e. telle que pour tous $i \neq j$ on a $\phi(e_i, e_j) = 0$). Que dire de la matrice pour ϕ dans cette base ?

2.5 Endomorphismes normaux

2.5.1 Définition: Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u \circ u^* = u^* \circ u$ est dit *endomorphisme normal*.
2.5.2 Exercice: Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de E pour lequel il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres.
Montrer que u est un endomorphisme normal.

2.5.3 Exercice: Soient E un espace vectoriel **hermitien** et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme **normal**.
Soient $\lambda \in \mathbf{C}$ une valeur propre de u et z un vecteur propre de u relativement à λ. On note E_λ l'espace propre associé à λ.
(a) Montrez que $u^*(z)$ est aussi un vecteur propre de u relativement à λ.
(b) Montrez que pour tout $y \in E_\lambda$, $(y|u^*(z)) = (y|\overline{\lambda}z)$.
(c) En déduire $u^*(z) = \overline{\lambda}z$.
(d) En déduire qu'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres pour u.

Proposition 2.5.4 *Un endomorphisme d'un espace* **hermitien** *est normal si et seulement si il existe une base orthonormée formée de vecteurs propres.*

Démonstration : Exercice.

Question Est-ce que la proposition précédente est encore vraie pour un espace euclidien ?

Proposition 2.5.5 *Toute matrice antihermitienne a toutes ses valeurs propres imaginaires pures.*
En particulier, toute matrice antisymétrique réelle a toutes ses valeurs propres imaginaires pures.

Démonstration : Exercice.

2.5.6 Exercice: Soient E un espace vectoriel euclidien ou hermitien et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme inversible tel que $u^{-1} = u^*$.
(a) Que cela signifie-t-il pour la matrice U de u exprimée dans une base orthonormée ?
(b) Montrez que si λ est une valeur propre pour u alors $|\lambda| = 1$.
(c) Montrez que si λ est une valeur propre pour u alors $\overline{\lambda}$ est une valeur propre pour u^*.
(d) Montrez, lorsque E **hermitien**, qu'il existe une base orthonormée de E formée de vecteurs propres de u.

Chapitre 3

Automorphismes orthogonaux

On étudie ici la partie suivante du programme :
2.IV.1. Espaces euclidiens.
(c) Automorphismes orthogonaux. Groupe orthogonal $O(E)$,
groupe des rotations (ou spécial orthogonal) $SO(E)$.
Matrices orthogonales. Groupes $O(n)$ et $SO(n)$. Matrice associée à un automorphisme orthogonal dans une base orthonormale.
Changements de base orthonormale.
(d) Déterminant de n vecteurs d'un espace vectoriel euclidien orienté de dimension n.
Produit vectoriel en dimension 3 ;
expression dans une base orthonormale directe.
2.IV.3. Espaces hermitiens.
(c) Automorphismes unitaires.
Groupe unitaire $U(E)$. Groupe $U(n)$ des matrices unitaires d'ordre n.

3.1 Isométries

On désigne par E un espace euclidien ou hermitien.

3.1.1 Définition: Une *isométrie* de E est une application $u : E \to E$

telle que pour tout $x, y \in E$ on ait $\|u(x) - u(y)\| = \|x - y\|$.

Questions :
(i) Une isométrie est-elle toujours injective ?
(ii) Une isométrie linéaire est-elle toujours bijective ?

Proposition 3.1.2 *Soit $u : E \to E$ une application d'un espace euclidien ou hermitien E vers lui-même. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) u est une isométrie linéaire ;
(b) u est linéaire et, pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \|x\|$;
(c) u conserve le produit scalaire.
(d) u est un endomorphisme bijectif et $u^{-1} = u^*$;
(e) u est linéaire et l'image par u de toute base orthonormée est encore une base orthonormée ;
(f) u est linéaire et il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ telle que $u(\mathcal{B})$ est encore une base orthonormée.

Démonstration : Exercice.

Questions :
(1). Peut-on trouver une application $u : E \to E$ telle que pour tout $x \in E$ on ait $\|u(x)\| = \|x\|$ et qui ne soit pas une isométrie ?
(2). Montrer que si u est une isométrie telle que $u(0) = 0$, alors u est linéaire. (On pourra prouver que u conserve le produit scalaire.)
(3). Une isométrie est-elle toujours bijective ?

3.2 Automorphismes orthogonaux, unitaires

3.2.1 Définition: Une isométrie linéaire est appelée *automorphisme orthogonal* lorsque E est euclidien et *automorphisme unitaire* lorsque E est hermitien.

Questions :
L'expression $det(f)$ est-elle bien définie pour tout endomorphisme f de E ?

Que dire de $det(f)$ lorsque f est un automorphisme orthogonal ou unitaire ?

3.2.2 Notations:
Lorsque E est euclidien, on désigne par
$O(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de E, par
$SO(E)$ ou $O^+(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de déterminant égal à 1, et par
$O^-(E)$ l'ensemble des automorphismes orthogonaux de déterminant égal à -1.
Lorsque E est hermitien, on désigne par $U(E)$ l'ensemble des automorphismes unitaires et par $SU(E)$ l'ensemble des automorphismes unitaires de déterminant égal à 1.

Proposition 3.2.3 *Les ensembles $O(E)$ et $U(E)$ munis de la composition des applications sont des groupes.*
Les sous ensembles $SO(E)$ et $SU(E)$ en sont des sous groupes distingués.

Démonstration : Exercice.

3.2.4 Définition: On dit que $SO(E)$ est le *groupe spécial orthogonal* et que $SU(E)$ est le *groupe spécial unitaire*.

3.3 Les groupes $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ et $SU(n)$

3.3.1 Notations: Pour tout entier $n \geq 1$, on désigne par $O(n)$, $SO(n)$, $U(n)$ et $SU(n)$ les ensembles suivants :

$$O(n) = \{P \in M_n(\mathbf{R}) \mid P \text{ inversible et } P^t = P^{-1}\}.$$

Les éléments de $O(n)$ sont appelés *matrices orthogonales d'ordre n*.

$$SO(n) = \{P \in O(n) \mid det(P) = 1\}.$$

$$U(n) = \{P \in M_n(\mathbf{C}) \mid P \text{ inversible et } P^t = \overline{P}^{-1}\}.$$

Les éléments de $U(n)$ sont appelés *matrices unitaires d'ordre n*.

$$SU(n) = \{P \in U(n) \mid det(P) = 1\}.$$

3.3.2 Exercice:
i. Etablir un lien entre les ensembles $O(n)$ et $O(E)$, puis entre $U(n)$ et $U(E)$.
ii. En déduire une struture de groupe pour $O(n)$ et $U(n)$.
iii. Montrez que $SO(n)$ (resp. $SU(n)$) est un sous-groupe distingué de $O(n)$ (resp. $U(n)$).

3.3.3 Exercice: Soient $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases orthonormées de E.
i. Montrez qu'il existe $u \in GL(E)$ tel que $u(\mathcal{B}) = \mathcal{B}'$.
ii. A-t-on toujours $u \in O(E)$ ou $u \in U(E)$?
iii. Soit v un endomorphisme de E. Exprimez sa matrice V' dans la base $\mathcal{B}'$ en fonction de sa matrice V dans la base $\mathcal{B}$.

3.4 Symétries orthogonales

3.4.1 Exercice: Soient F et G des sous-espaces vectoriels de E tels que
$E = F \oplus G$ et $s : E \to E$ la symétrie par rapport à F parallèlement à G.
Montrez que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) s est une isométrie.
(b) $F \perp G$
(c) s est une symétrie orthogonale (i.e. $F = G^{\perp}$).

Quelle est dans ce cas la matrice de s dans une base de à choisir ?

3.4.2 Exercice:
i. Comparer $SO(2)$ et le groupe U des nombres complexes de module 1.
ii. Montrez que les éléments de $O(2) - SO(2)$ sont les matrices des symétries orthogonales par rapport à des droites.
iii. Donnez la forme générale des éléments de $U(2)$ et de $SU(2)$.
iv. Dans $\mathbf{C}^2$ muni du produit scalaire usuel soit M la matrice d'une application s. Montrez que s est une symétrie orthogonale par rapport à une droite si et seulement si il existe $a \in \mathbf{R}$ et $b \in \mathbf{C}$ tel que M est de la forme

$$\begin{pmatrix} a & \overline{b} \\ b & -a \end{pmatrix}$$

3.5 Produit mixte et produit vectoriel dans les espaces euclidiens orientés

Sauf mention du contraire E désignera maintenant un espace vectoriel **euclidien** de dimension finie égale à n, orienté par une base orthonormée $\mathcal{E}$.

3.5.1 Exercice:
(i) Rappeler la signification des phrases suivantes :
"E est orienté par une base $\mathcal{E}$."
"E est orienté."
"L'automorphisme $u \in GL(E)$ conserve l'orientation de E."
"La base $\mathcal{B}$ est directe (resp. indirecte)."
(ii) Soient $x_1, \ldots, x_n$, n vecteurs de E. Montrez que le réel

$$[x_1, \ldots, x_n] := det_{\mathcal{E}}(x_1, \ldots, x_n)$$

ne dépend que du n-uplet $(x_1, \ldots, x_n)$ pris dans cet ordre et de l'orientation de E (c'est le "produit mixte").
(iii) Calculez $[x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_n]$ en fonction de $[x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_n]$.
(iv) Soient $x_1, \ldots, x_{n-1} \in E$ fixés.
Montrez qu'il existe un unique $z \in E$ tel que pour tout $t \in E$ on a

$$[x_1, \ldots, x_{n-1}, t] = (t|z).$$

On notera

$$z := x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1}$$

Calculer les coordonnées z_i de z dans une base orthonormée quelconque $\mathcal{B}$.
3.5.2 Définitions: Soient E un espace vectoriel euclidien de dimension finie égale à n, orienté par une base orthonormée et $x_1, \ldots, x_n$, n vecteurs de E. Le **produit mixte** des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ est le réel $[x_1, \ldots, x_n] := det_{\mathcal{E}}(x_1, \ldots, x_n)$.
Le **produit vectoriel** des vecteurs $x_1, \ldots, x_n$ est le vecteur $z \in E$, noté $z := x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1}$, tel que pour tout $t \in E$ on a $[x_1, \ldots, x_{n-1}, t] = (t|z)$.

Questions :
Les produits mixtes et vectoriels sont-ils invariants par $SO(E)$? et par $O(E)$?

Proposition 3.5.3 *i. La famille $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ est libre si et seulement si le produit vectoriel $x_1 \wedge \ldots \wedge x_{n-1}$ est non nul.*

ii. Si la famille $\{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ *est libre, alors* $\{x_1, \ldots, x_{n-1}, z\}$ *est une base et*

$$\langle z \rangle = \langle x_1, \ldots, x_{n-1} \rangle^{\perp}.$$

Démonstration : Exercice.

3.5.4 Exercice: Soient x et y deux vecteurs d'un espace euclidien orienté E.
(i) Dans quel cas l'expression $x \wedge y$ a-t-elle un sens ?
(ii) Dans ce cas, montrez que l'application :

$$E \times E \to E$$

$$x, y \to x \wedge y$$

est bilinéaire.
(iv) Calculez dans une base orthonormée quelconque, les coordonnées de $z = x \wedge y$ en fonction de celles de x et de y.
(v) Si $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ est une base orthonormée (in)directe de E, calculez $e_1 \wedge e_2$, $e_1 \wedge e_3$, $e_2 \wedge e_3$.

Chapitre 4

Géométrie vectorielle euclidienne

On étudie ici la partie suivante du programme :
2.IV.2. Géométrie vectorielle euclidienne.
(a) Les réflexions engendrent le groupe orthogonal $O(E)$.
(b) Dans le plan euclidien orienté ($n = 2$) : matrice d'une rotation ; angle d'une rotation. Morphisme canonique de $\mathbf{R}$ sur $SO(2)$.
Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.
(c) Dans l'espace euclidien orienté ($n = 3$) : Axe et angle d'une rotation. Les demi-tours engendrent $SO(3)$.
Classification des automorphismes orthogonaux à partir du sous-espace des points invariants.
(d) En dimension 2 ou 3 : groupe des similitudes ; groupe des similitudes directes.
Rapport d'une similitude ; automorphisme orthogonal associé.

4.1 Produits des reflexions

On désigne par E un espace vectoriel euclidien de dimension n.
4.1.1 Exercice: Soient $u \in O(E)$ et F un sous-espace vectoriel de E.
i. Montrez que

$$u(F) \subset F \Leftrightarrow u(F) = F \Leftrightarrow u(F^{\perp}) = F^{\perp}$$

ii. Soit $x \in E$ avec $u(x) \neq x$. Soit $H = (\langle x - u(x) \rangle)^{\perp}$ et s_H la symétrie orthogonale par rapport à H. Calculer $s_H(x)$ et $s_H(u(x))$.
iii. Montrez que $s \circ u(x) = x$. On pose $G = \langle x \rangle$. Montrez que $s \circ u$ laisse invariant $G^{\perp}$.
iv. En déduire la proposition suivante :

Proposition 4.1.2 *Tout endomorphisme orthogonal de E peut s'exprimer comme produit de réflexions (ou symétries hyperplanes).*
Si la dimension de E est au moins égale à 2, on peut toujours supposer que ce produit contient au plus n réflexions.

4.2 Les angles non-orientés

La notion d'angle non orienté est basée sur la définition (supposée connue) de la fonction *cosinus*.

4.2.1 Définition: *L'angle non orienté de deux droites $D = \mathbf{R}x$ et $D' = \mathbf{R}x'$*, est

$$\theta = \widehat{D, D'} = arccos \frac{|(x|x')|}{\|x\|\|x'\|} \in [0, \frac{\pi}{2}],$$

d'où la formule $|(x|x')| = \|x\|\|x'\| cos\theta$.

4.2.2 Définition: *L'angle non orienté de deux vecteurs x et x'* est

$$\theta = \widehat{x, x'} = arccos \frac{(x|x')}{\|x\|\|x'\|} \in [0, \pi],$$

d'où la formule $(x|x') = \|x\|\|x'\| cos\theta$.

4.2.3 Exercice: On suppose que E est orienté, de dimension $dim(E) = 3$. Soient x et x' deux vecteurs non colinéaires. On pose $i = \frac{x}{\|x\|}$ et on complète i en une base orthonormée (i, j) du plan engendré par x et x'. On pose

$$k = \frac{x \wedge x'}{\|x \wedge x'\|}$$

(a) Montrez qu'on peut choisir j pour que (i, j, k) soit une base orthonormée directe de E.
(b) Soit θ l'angle (non orienté) $\theta = \widehat{x, x'} \in [0, \pi]$. Calculer les coordonnées du vecteur $\frac{x'}{\|x'\|}$ dans la base (i, j, k). En déduire $\|x \wedge x'\|$.

4.3 Groupe orthogonal d'une droite euclidienne

4.3.1 Exercice: Soit D un espace euclidien de dimension 1. Calculer le groupe orthogonal $O(D)$.
Soient D une droite vectorielle d'un espace euclidien E et $u \in O(E)$ tel que $u(D) \subset D$. Que dire de la restriction de u à D ?

4.4 Groupe orthogonal du plan euclidien $E = E_2$

4.4.1 Exercice: Soient $\mathcal{E}$ une base orthonormée d'un plan euclidien $E = E_2$ et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :
i. $u \in SO(E)$ si et seulement si il existe des scalaires a et b tels que $a^2+b^2 = 1$ et

$$M(u, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas les scalaires a et $|b|$ ne dépendent que de u et pas de $\mathcal{E}$. Le signe de b dépend seulement de l'orientation de E_2. De plus, u n'a aucune valeur propre réelle, sauf si $u = \pm Id_E$ (cas où $b = 0$, $a = \pm 1$).
ii. $u \in O^-(E)$ si et seulement si il existe des scalaires a et b tels que $a^2+b^2 = 1$ et

$$M(u, \mathcal{E}) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Dans ce cas les valeurs propres de u sont 1 et -1 et u est la symétrie par rapport à la droite vectorielle engendrée par $(b, 1-a)$.

4.5 Classification des éléments

4.5.1 Définition: Les éléments de $O^+(E_2)$ sont appelés *rotations*.

Question : Que vaut $u \circ u$ si $u \in O^-(E)$?

4.5.2 Exercice: Classifier les automorphismes orthogonaux de E_2 à

partir du sous-espace de leurs points invariants.

4.5.3 Exercice: Montrez que :
(i) Le produit de deux symétries orthogonales est une rotation.
(ii) Toute rotation est produit de deux symétries orthogonales par rapport à des droites dont l'une est arbitraire.
(iii) Pour tout $r \in O^+(E_2)$ et pour tout $s \in O^-(E_2)$ on a

$$s \circ r \circ s = r^{-1}.$$

Question : L'ensemble $O^-(E_2)$ est-il aussi muni "naturellement" d'une structure de groupe ? Pourriez-vous le faire, quitte a choisir quelquechose ?

4.5.4 Exercice:
i. Montrez que pour toute rotation $r \in O^+(E_2)$ où E_2 est le plan euclidien orienté, il existe un unique $\theta \in [0, 2\pi[$ tel que la matrice de r dans n'importe quelle base orthonormée directe soit :

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{pmatrix}.$$

ii. Quel est le morphisme canonique de $\mathbf{R}$ sur $SO(2)$? C'est un morphisme de quoi ? Est-il surjectif ? injectif ? Quel est son noyau ?
iii. Le groupe $O^+(E_2)$ est-il commutatif ?

4.5.5 Exercice:
Soient $u, v \in E_2$ deux vecteurs non nuls tels que $\|u\| = \|v\|$. Montrer que :
i. il existe une unique rotation $r \in O^+(E_2)$ telle que $r(u) = v$;
ii. il existe une unique symétrie $s \in O^-(E_2)$ telle que $s(u) = v$.

4.6 Angle orienté de deux vecteurs

4.6.1 Définition: On dit que deux couples de vecteurs normés (u, v) et (u', v') sont équivalents s'il existe une rotation $r \in O^+(E_2)$ telle que $r(u) = v$ et $r(u') = v'$.

4.6.2 Exercice: i. Montrer qu'on définit ainsi une relation d'équivalence sur l'ensemble S^1 des vecteurs de norme égale à 1.

ii. Montrer que les couples de vecteurs normés (u, v) et (u', v') sont équivalents si et seulement s'il existe une rotation $r \in O^+(E_2)$ telle que
$r(u) = u'$ et $r(v) = v'$.

4.6.3 Définition: L'ensemble $\mathcal{A}$ des angles orientés du plan vectoriel E_2 est l'ensemble quotient $S^1 \times S^1$ quotienté par cette relation d'équivalence. **L'angle orienté** du couple de vecteurs (u, v) est la classe d'équivalence du couple (u, v).

4.6.4 Exercice:
i. Peut-on trouver une bijection entre l'ensemble $\mathcal{A}$ et $O^+(E_2)$?
ii. Définir la somme et la différence de deux angles orientés.

4.7 Mesure de l'angle orienté de deux vecteurs

On suppose maintenant que E_2 **est orienté.**

4.7.1 Définitions: La **mesure de l'angle** (ou même, *l'angle*) d'une rotation r est le θ de l'exercice 4.5.4 qui lui correspond.
La **mesure de l'angle orienté** du couple de vecteurs (u, v) est celle de la rotation r telle que $v = r(u)$.

N.B. Lorsque E_2 est orienté, les ensembles $\mathcal{A}, O^+(E_2)$ et $[0, 2\pi[$ sont donc en bijection.

4.7.2 Exercice:
i. Montrer que toute rotation $r \in O^+(E_2)$ conserve les mesures des angles orientés et que toute symétrie $s \in O^-(E_2)$ les inverse.
ii. Quel est la mesure de l'angle de la composée de deux rotations ? de l'inverse d'une rotation ?
ii. Soient $u \in E_2$ un vecteur non nul et $v = r(u)$ où $r \in O^+(E_2)$ est une rotation d'angle θ. Calculer l'angle non orienté des deux vecteurs u et v.

4.7.3 Exercice: Soient D et D' deux droites du plan engendrées respectivement par les vecteurs d et d'. Soit θ l'angle non orienté des vecteurs d et d'.
Que dire de la rotation r qui envoie d sur d' ?

Que dire de l'angle orienté des vecteurs d et d' ? et de sa mesure ?
Que dire de l'angle non orienté des droites D et D' ?
Que dire de $s \circ s'$ où s et s' sont les symétries orthogonales d'axes D et D' ?

4.8 Groupe orthogonal de l'espace euclidien de dimension 3, $E = E_3$

4.8.1 Exercice: Soit $u \in O(E_3)$. Montrez qu'il existe $\theta \in [0, 2\pi[$ et une base orthonormée (i, j, k) (dépendante de u) dans laquelle la matrice de u soit :

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

si $u \in O^+(E_3)$, ou

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

si $u \in O^-(E_3)$.

Questions : 1. Qu'est-ce que u lorsque θ vaut 0, π , ou 2π ?
2. Que valent : l'espace $Im(u)$,
la restriction de u à $Im(u)$ et à son orthogonal $Im(u)^\perp$.

4.8.2 Définition:
Soit w un vecteur non nul de norme égale à 1 dans l'espace orienté E_3.
On oriente la droite vectorielle $\langle w \rangle$ engendrée par le vecteur w, par w
et le plan $\langle w \rangle^\perp$ par une base orthonormée (u, v) telle que (u, v, w) soit directe.
Pour tout $\theta \in [0, 2\pi]$, la *rotation d'axe* $\langle w \rangle$ *et d'angle* θ est l'application définie par la matrice :

$$\begin{pmatrix} cos\theta & -sin\theta & 0 \\ sin\theta & cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

dans la base orthonormée directe (u, v, w).

Question : Dans l'espace orienté E_3, soient r la rotation d'axe $\langle w \rangle$ et d'angle

θ et r' la rotation d'axe $\langle -w \rangle$ et d'angle θ. Comparer r et r'.
Soit r'' la rotation d'axe $\langle -w \rangle$ et d'angle $-\theta$. Comparer r et r''.
4.8.3 Rappel: La trace d'une matrice est égale à la somme des termes diagonaux. Elle est indépendante de la base choisie.

4.8.4 Exercice: Soient u une rotation de E_3 et $A = (a_{i,j})$ sa matrice dans une base quelconque.
1. Calculer le cosinus de son angle.
2. Lorsque E_3 est orienté et lorsque l'axe de u est orienté par k, montrer que $sin\theta$ a le signe du produit mixte $[x, u(x), k]$ pour tout $x \notin \langle k \rangle$.

4.8.5 Exercice: Montrez que tout $u \in O^-(E_3)$ est la composée d'une symétrie orthogonale par rapport à un plan P et d'une rotation d'axe $P^\perp$ dont le cosinus de l'angle est donné par la formule $2cos(\theta) = tru(u) + 1$.

4.8.6 Exercice:
1. Soit u une rotation de E_3 distincte de l'identité. Montrer que u est produit de deux symétries orthogonales par rapport à des plans contenant son axe, l'un des plans étant arbitraire.
2. En déduire que tout $u \in O^-(E_3)$ est la composée d'une ou trois symétrie planes orthogonales.
3. Soient (i, j, k) une base directe de E_3, r la rotation d'axe $\langle k \rangle$ et d'angle $\pi/3$ et s la symétrie orthogonale par rapport au plan $x + y + z = 0$. Déterminer l'axe de la rotation $s \circ r \circ s$.

4.9 Classification des éléments

Exercice 39 : Montrez que toute rotation de $O^+(E_3)$ est le produit de deux retournements (ou demi-tours).

4.9.1 Exercice: Classifier les automorphismes orthogonaux de E_3 à partir du sous-espace de leurs points invariants.

4.9.2 Exercice: Etudier l'endomorphisme de E_3 défini dans la base

orthonormée (i, j, k) par la matrice

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} & \frac{1-\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1-\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} & \frac{1+\sqrt{2}}{2\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

4.10 Similitudes.

4.10.1 Définition: Une *similitude* linéaire est un endomorphisme u de E pour lequel il existe un réel non nul k tel que pour tout x dans E on ait $\|u(x)\| = k\|x\|$.
On dit que k est le *rapport* de la similitude.

Questions
1. Pensez-vous que le k de la définition soit toujours unique ?
2. Une similitude est-elle toujours injective ? bijective ?
3. Qu'est-ce qu'une similitude de rapport 1 ?
4. Est-ce qu'une homothétie de rapport a est une similitude de rapport a ?
5. Qu'est-ce que l'application $\frac{1}{a}u$, si u est une similitude de rapport a ?
6. Est-ce que l'application av est une similitude si a est un réel et v une isométrie ?
7. Obtient-on ainsi toutes les similitudes ?
8. Quel est l'espace des vecteurs invariants par une similitude ?
9. Soit u une similitude de rapport a. Comparer pour tout $(x, y) \in E \times E$, les produits scalaires $(u(x), u(y))$ et (x, y).

Proposition 4.10.2 *Soit u un endomorphisme non nul d'un espace euclidien E de dimension au moins égale à 2. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) u est une similitude.
(b) u conserve l'orthogonalité.
(c) u est un endomorphisme bijectif qui conserve les angles non orientés de droites (ou de vecteurs).
(d) il existe un réel a tel que pour tout $(x, y) \in E \times E$, on a $(u(x), u(y)) = a(x, y)$.
(e) il existe un réel a tel que $u \circ u^* = aId$.

Démonstration : Exercice.

4.10.3 Définition: Une *similitude directe* est une similitude s telle que $det(s) > 0$.
Une *similitude indirecte* est une similitude s telle que $det(s) < 0$.
Question
1. Calculer le déterminant d'une similitude (in)directe de rapport a.
2. Décrire, lorsque E est de dimension 2, les similitudes directes et indirectes. Par quoi sont-elles déterminées ?
3. Donner, dans une base orthonormée, la forme des matrices des similitudes directes.

4.10.4 Notations: On désigne par $S(E)$ l'ensemble des similitudes linéaires de E, par $S^+(E)$ l'ensemble des similitudes directes et par $S^-(E)$ l'ensemble des similitudes indirectes.

Questions
1. La multiplication des matrices munit-elle les ensembles $S(E), S^+(E)$ et $S^-(E)$ d'une structure de groupe ? Si oui, sont-ils commutatifs ?
2. Que dire du quotient $S(E)/S^+(E)$?
(Dans ce cas, on dit que $S^+(E)$ est un sous groupe de $S(E)$, d'indice 2.)
3. Est-ce que $S^+(E)$ est un sous groupe distingué de $S(E)$?

4.10.5 Exercice:
1. Déterminer un isomorphisme entre les groupes $S(E)$ et $O(E) \times \mathbf{R}_+^* I$,
où $\mathbf{R}_+^* I$ représente l'ensemble des homothéties de rapports positifs.
2. Dans cet isomorphisme, a quoi correspond $O^+(E)$?

4.10.6 Exercice:
1. Les groupes $O(E), O^+(E), \mathbf{R}^* I, \mathbf{R}_+^* I$ et $S^+(E)$ sont-ils distingués dans $S(E)$?
Pour chaque cas, déterminer le quotient de $S(E)$ par le sous-groupe correspondant.

4.10.7 Exercice: Soient u et v deux vecteurs de E_2. Montrer qu'il existe une et une seule similitude directe (resp. indirecte) qui transforme u en v.

Chapitre 5

Réduction des endomorphismes

On étudie ici la partie suivante du programme :
2.IV.5. Réduction des endomorphismes symétriques et des endomorphismes hermitiens.
(b) Formes bilinéaires symétriques sur un espace euclidien, formes quadratiques, polarisation.
Endomorphisme symétrique associé à une forme quadratique ; réduction dans une base orthonormale.

Dans ce chapitre, on reprend et on approfondit les notions vues au chapitre 1 en se limitant au cas où E est un espace vectoriel réel. Les seuls résultats du chapitre 1 que nous utiliserons ici sont ceux de l'exercice 1.2.4 et du procédé d'orthonormalisation de Schmidt.

5.1 Formes bilinéaires

5.1.1 Définition: Une *forme bilinéaire* sur E est une application $\varphi : E \times E \to \mathbf{R}$ telle que pour tout $x \in E$ les fonctions $\varphi(x, \cdot)$ et $\varphi(\cdot, y)$ sont des formes linéaires sur E.

5.1.2 Définition:

On dit que φ est *symétrique* si pour tous $x, y \in E$ on a $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$.
On dit que φ est *antisymétrique* si pour tous $x, y \in E$ on a $\varphi(y,x) = -\varphi(x,y)$.

Proposition 5.1.3 *Une forme bilinéaire φ s'écrit de façon unique $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$ où φ_1 est une forme bilinéaire symétrique et φ_2 une forme bilinéaire antisymétrique.*

Démonstration : exercice.
5.1.4 Définition: La matrice d'une forme bilinéaire φ dans une base $\mathcal{E} = \{e_1, \ldots, e_n\}$ de E est la matrice $A = (a_{jk})_{1 \leq j,k \leq n}$ où $a_{jk} = \varphi(e_j, e_k)$.

N.B. Pour tout $x \in E$ et $y \in E$,

$$x = \sum \lambda_j e_j, \quad y = \sum \mu_k e_k$$

on a

$$\varphi(x,y) = \sum_{j,k=1}^{n} \lambda_j \mu_k \varphi(e_j, e_k). = \sum_{i,j=1}^{n} \lambda_j \mu_k a_{j,k} = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) A \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix}.$$

Réciproquement, toute expression de cette forme avec des coefficients $a_{j,k}$ arbitraires dans $\mathbf{R}$ est une forme bilinéaire, et la matrice de cette forme dans le base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est A.

5.1.5 Exercice: φ est symétrique (resp. antisymétrique) si et seulement si la matrice A est symétrique (resp. antisymétrique).

5.2 Formes quadratiques

5.2.1 Définition: Une *forme quadratique* est une application $q : E \to \mathbf{R}$ telle qu'il existe une forme bilinéaire φ pour laquelle :

$$\forall x \in E, \;\; q(x) = \varphi(x,x).$$

On dit que q est la forme quadratique associée à φ.

5.2.2 Exercice: Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie, et $q : E \to \mathbf{R}$ une fonction telle qu'il existe une base $\{e_1, \ldots, e_n\}$ et des coefficients a_{ij} tels que pour tout $x_1, \ldots, x_n$ on a

$$q(x_1e_1 + \ldots + x_ne_n) = \sum_{i,j} a_{ij}x_ix_j.$$

Soit $\{e'_1, \ldots, e'_n\}$ une autre base, montrer qu'il existe a'_{ij} tels que pour tout $x_1, \ldots, x_n$ on a

$$q(x_1e'_1 + \ldots + x_ne'_n) = \sum_{i,j} a'_{ij}x_ix_j.$$

Est-ce que les a'_{ij} sont uniques ? Montrer que q est une forme quadratique.

5.2.3 Exercice: Que dire de la forme quadratique associée à une forme bilinéaire antisymétrique ?

5.3 Forme polaire

5.3.1 Définition: La *forme polaire* d'une forme quadratique q est la forme bilinéaire symétrique $\varphi : E \times E \to \mathbf{R}$ définie par :

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2}[q(x + y) - q(x) - q(y)].$$

5.3.2 Exercice: a. Soient q une forme quadratique, φ la forme polaire de q et q' la forme quadratique associée à φ. Exprimer q' en fonction de q.
b. Soient φ une forme bilinéaire, q sa forme quadratique associée et φ' la forme polaire de q. Exprimer $\varphi'(x, y)$ en fonction de $\varphi(x, y)$.
Plus formellement, on peut voir que si $\varphi(x, y) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{j,k}\lambda_j\mu_k$ pour tout $x = \sum \lambda_j e_j, \quad y = \sum \mu_k e_k$ on a

$$q(x) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{j,k}\lambda_j\lambda_k,$$

ce qui est l'expression générale d'un *polynôme homogène de degré* 2 *en* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ à coefficients réels. L'écriture réduite de ce polynôme est

$$q(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j \lambda_j^2 + \sum_{1 \leq j < k \leq n} c_{j,k} \lambda_j \lambda_k,$$

où

$$c_j = a_{j,j}, \quad c_{j,k} = a_{j,k} + a_{k,j} \text{ lorsque } j < k.$$

Donc *la forme polaire* φ' est définie par

$$\varphi'(x, y) = \sum_{j,k=1}^{n} \widetilde{a_{j,k}} \lambda_j \mu_k$$

avec

$$\widetilde{a_{j,j}} = c_j, \quad \widetilde{a_{j,k}} = \widetilde{a_{k,j}} = \frac{1}{2} c_{j,k} \text{ si } j < k.$$

Donc, pour passer de $q(x)$ à $\varphi'(x, y)$, on a remplacé λ_j^2 par $\lambda_j \mu_j$ et $\lambda_j \lambda_k$ par $\frac{1}{2}(\lambda_j \mu_k + \lambda_k \mu_j)$ si $j \neq k$.
Ce sont les *règles de polarisation (ou de dédoublement)* d'un polynôme homogène de degré 2 en $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.

Proposition 5.3.3 *L'application de l'ensemble des formes bilinéaires symétriques vers l'ensemble des formes quadratiques qui à toute forme bilinéaire* φ *associe sa forme quadratique* q *est bijective.*

Démonstration : exercice.

5.3.4 Définitions: La *matrice* d'une forme quadratique est celle de sa forme polaire associée. Le *rang* d'une forme quadratique est celui de sa matrice.

5.4 Noyaux des formes bilinéaires et quadratiques, formes non-dégénérées

5.4.1 Définitions: Soient φ une forme bilinéaire symétrique sur un espace vectoriel réel E et q sa forme quadratique associée.

1. Le *noyau* de φ (ou de q) est le sous-espace vectoriel de E constitué des éléments x tels que pour tout $y \in E$, $\varphi(x, y) = 0$.
2. On dit que φ (ou q) est *non-dégénérée* si son noyau est réduit à $\{0\}$, c'est-à-dire si :

$$[\forall y \in E,\ \ \varphi(x, y) = 0] \ \ \Rightarrow \ \ x = 0.$$

3. On dit que q (ou que sa forme polaire) est *positive ou nulle* si pour tout $x \in E,\ q(x) \geq 0$.

Remarque Le noyau de φ est égal au noyau de l'application linéaire Φ de E dans son dual E^* qui à x associe l'application $\varphi(x, \cdot)$.

5.4.2 Rappel: (Voir exercice 1.2.4) Si une forme bilinéaire symétrique φ est positive ou nulle, on a *l'inégalité de Schwarz*

$$\forall x, y \in E, \quad (\varphi(x, y))^2 \leq \varphi(x, x)\varphi(y, y)$$

et *l'inégalité triangulaire*

$$\sqrt{q(x + y)} \leq \sqrt{q(x)} + \sqrt{q(y)}.$$

Remarque Il en résulte que **dans ce cas**, le noyau de q est $\{x \in E,\ q(x) = 0\}$.

5.5 Endomorphisme symétrique associé à une forme quadratique

On désigne maintenant par E un espace euclidien non réduit à $\{0\}$, de dimension finie sur $\mathbf{R}$. On notera $(|)$ le produit scalaire et $\| \cdot \|$ la norme euclidienne associée (pour les définitions voir 1.1.2 et 1.3.3).

On rappelle que le procédé d'orthonormalisation de Schmidt (cf 1.6.1) prouve l'existence de *bases orthonormées* dans E,

Pour tout entier n, l'espace vectoriel $\mathbf{R}^n$ muni du produit scalaire usuel (cf l'exemple de la fin de 1.1) est un espace euclidien de dimension n.
D'autre part, pour tout entier n donné, il n'y a, à isomorphisme près, qu'un seul espace euclidien de dimension n. Cela signifie que si E et E' sont deux espaces euclidiens de même dimension, alors il existe un isomorphisme d'espaces euclidiens $E \cong E'$ (c'est-à-dire une bijection linéaire qui conserve φ_0). Cet isomorphisme n'est pas unique.

Proposition 5.5.1 *Soit E un espace euclidien. Soit q une forme quadratique sur E et φ sa forme polaire (à ne pas confondre avec le produit scalaire dans E !). Alors, il existe un unique endomorphisme u de E tel que*

$$\forall x, y \in E, \quad \varphi(x, y) = (u(x)|y).$$

Cet endomorphisme est symétrique *en ce sens que :*

$$\forall x, y \in E, \quad (u(x)|y) = (x|u(y)).$$

Démonstration : Pour $x \in E$, $\varphi(x, \cdot)$ est une forme linéaire sur E, donc il existe $X \in E$ unique tel que $\varphi(x, \cdot) = \varphi_0(X, \cdot)$ puisque φ_0 est non dégénérée. Il est facile de vérifier que l'application $u : E \to E$ définie par $u(x) = X$ est linéaire, et on a, par construction :

$$\varphi(x, y) = (u(x)|y)$$

pour tous $x, y \in E$. L'unicité de u résulte de l'unicité précédente de X. Enfin, on a

$$(x|u(y)) = (u(y)|x) = \varphi(y, x) = \varphi(x, y) = (u(x)|y).$$

///

5.5.2 Définition: Avec les notations de la proposition précédente, on dit que u est *l'endomorphisme symétrique associé à la forme quadratique q* sur l'espace euclidien E.

N.B. Le noyau de q est le noyau de u, et u est *l'unique* endomorphisme symétrique de E tel que pour tout $x \in E$,

$$q(x) = (u(x)|x).$$

Proposition 5.5.3 *Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base* orthonormée *de l'espace euclidien E, si q est une forme quadratique sur E, et si u est l'endomorphisme symétrique de E associé à q, alors q et u ont la* même matrice *dans la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$.*

5.5.4 Exercice: Démontrer cette proposition.
Que peut-on dire lorsque $\{e_1, \ldots, e_n\}$ n'est pas orthonormée ?

5.6 Diagonalisation

Théorème 5.6.1 *Soit q une forme quadratique sur un espace euclidien E. Alors il existe une base* orthonormée $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ *de E qui* diagonalise q,
c'est-à-dire telle qu'il existe des coefficients $a_j \in \mathbf{R}$, tels que pour tout $x \in E$, on a $q(x) = \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j^2$ si $x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j$.

Démonstration : Soit u l'endomorphisme symétrique de E associé à q. Si $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base orthonormée de E qui diagonalise u (on sait que de telles bases existent !), on a $u(e_j) = a_j e_j$ pour $1 \leq j \leq n$, les a_j étant les *valeurs propres de u*. D'où pour

$$x = \sum_{j=1}^n \lambda_j e_j, \qquad u(x) = \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j e_j$$

et

$$q(x) = (u(x)|x) = \sum_{j,k=1}^n (a_j \lambda_j e_j | \lambda_k e_k)$$

$$= \sum_{j=1}^n a_j \lambda_j^2.$$

///

5.6.2 Exercice:
a. Une fois q diagonalisée comme dans le théorème, donner l'expression de $\varphi(x, y)$ et la matrice de q dans la base B, où φ est la forme polaire associée à q.
b. Que dire des a_i et du rang de q lorsque φ est non dégénérée ?
5.6.3 Exercice:
a. Dans $\mathbf{R}^2$ montrer que $q_0(x) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 5x_2^2$ est une forme quadratique non dégénérée positive ou nulle (notation : $x = (x_1, x_2)$ dans $\mathbf{R}^2$).
b. Soit E l'espace euclidien $\mathbf{R}^2$ muni de la forme φ_0, forme polaire de q_0. Trouver une base orthonormée de E (pour la forme φ_0) qui diagonalise

$$q(x) = x_1^2 + 6x_1x_2 - 3x_2^2.$$

5.7 Décomposition en carrés

Théorème 5.7.1 *Soient E un espace vectoriel de dimension finie n sur $\mathbf{R}$ et q une forme quadratique sur E. Alors il existe n formes linéaires sur E, indépendantes, notées $l_1, \ldots, l_n$, et il existe des réels $a_1, \ldots, a_n$ tels que*

$$q = \sum_{j=1}^{n} a_j l_j^2.$$

Démonstration : D'après le théorème 3, il existe une base orthonormée $\{e_1, \ldots, e_n\}$ qui diagonalise q dans ce sens que si

$$x = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j e_j$$

alors

$$q(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j \lambda_j^2.$$

Désignons par $\{l_1, \ldots, l_n\}$ la base duale de la base $\{e_1, \ldots, e_n\}$, alors la formule ci-dessus s'écrit :

$$q = \sum_{j=1}^{n} a_j l_j^2.$$

///

Malgré cette démonstration facile et rapide, on peut avoir besoin d'une méthode plus facile à mettre réellement en oeuvre pour trouver une décomposition de q en somme de carrés (une telle décomposition n'étant pas unique, il peut y avoir plusieurs façons d'en trouver une).

5.7.2 Exercice: Décomposer en carrés la forme quadratique de $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$q(x, y, z) = x^2 + 2yz + 4zx - 6xy.$$

5.7.3 Notations: Avec les notations du théorème précédent, on pose :

$$n_0 = card\{j, a_j = 0\}, \quad n_+ = card\{j, a_j > 0\}, \quad n_- = card\{j, a_j < 0\}.$$

5.8 La signature d'une forme quadratique

Nous admettrons le :

Théorème 5.8.1 (Théorème d'inertie de Sylvester) *Les entiers n_0, n_+ et n_- ne dépendent pas de la décomposition en carrés considérée mais seulement de q.*

N.B. On a les relations $n = n_0 + n_+ + n_-$ et $Rg(q) = n_+ + n_-$,
où $Rg(q)$ est le rang de q.

5.8.2 Définition: La *signature* de q est le couple $sg(q) = (n_+, n_-)$.

Proposition 5.8.3 *L'entier n_+ est le maximum des dimensions des sous espaces F de E tels que $q|F$ est définie positive.*

5.8.4 Exercice: Soit q une forme quadratique sur $\mathbf{R}^3$
Montrer que q est le produit de deux formes linéaires si et seulement si :
$Rang(q) \leq 2$ ou
$Rang(q) = 2$ mais q n'est ni positive ou nulle ni négative ou nulle.

5.8.5 Exercice: Décomposer en carrés la forme quadratique de $\mathbf{R}^3$ définie par :

$$q(x, y, z) = yz + \frac{1}{2}zx + \frac{1}{2}xy.$$

Soit $\mathcal{C}$ le cône d'équation $q(x, y, z) = 0$. Déterminer tous les plans qui coupent $\mathcal{C}$ suivant une parabole.